Taki Academy
www.takiacademy.com

# Mathématiques

## Théme : Suites réelles

## Exercice 3 type devoir

## Exercice :

On pose, pour tout n de IN*, $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

**1°)** Montrer que pour tout $n \in$ IN*, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

**2°)** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**3°)** Pour tout $n \in$ IN*, on pose : $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**a)** Montrer que pour tout $n \in$ IN*, on a : $v_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $(v_n)$.

**b)** En utilisant la double inégalité, $u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} < u_{n-1}$, montrer que la suite de terme générale $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ converge vers le réel 2.

1°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$\Rightarrow 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

**Conclusion:** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

On a $1 \leqslant k \leqslant n$

$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}(n - 1 + 1) \leqslant V_n$

$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \leqslant V_n$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n} \leqslant V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$

b) On a $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \; V_n \geqslant \sqrt{n}$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty}$

3) b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_k \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant u_{k-1}$

$\Rightarrow 2u_k \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2u_{k-1}$

$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$

$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant V_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \dfrac{V_n}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$

• $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1} - 1$

• $\sum_{k=1}^{n-1} u_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

$= (\sqrt{1} - 0) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

$= \sqrt{n}$

Donc $\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

$2.\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leqslant 2$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ ($\frac{1}{n} \to 0$)

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2}$